3维空间有距离 夹角等 概念 $\xrightarrow{\text{坐标系}}$ $\mathbb{R}^3$ 上向量的模长，夹角
比较容易的推广到 $\mathbb{R}^n$　　$|(x_1,\dots,x_n)| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$,
如何推广到抽象的线性空间上

几何	代数
$\mathbb{R}$-线性空间 $\xleftrightarrow[1:1]{\text{基 } \alpha_1\cdots\alpha_n}$	$\mathbb{R}^n$
v	$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
$\mathcal{A}$	A
长度，夹角 ??	长度，夹角
$\mathcal{A}$ 保持长度不变的线性变换	A ??
??	转置 A^T
??	对称矩阵

回顾 $\mathbb{R}^3$ 上的模长与夹角公式：

$$(a,b) = \frac{|a+b|^2-|a|^2-|b|^2}{2}$$

$$\begin{cases} |a| = \sqrt{(a,a)} \\ \theta = \arccos \dfrac{(a,b)}{\sqrt{(a,a)(b,b)}} = \arccos \dfrac{(a,b)}{|a|\cdot|b|} \end{cases}$$

模长和夹角可由内积完全确定. 反之，内积可由模长确定

$\mathbb{R}^3$ 上内积的基本性质：1) 对称性 2) 线性性 3) 正定性

为了在一般 $\mathbb{R}$-线性空间上定义度量，我们需要引入内积.

§7.1 定义与基本性质（欧几里得空间）

定义：V 为 $\mathbb{R}$-线性空间。若 V 中任意两个向量 a 和 b 都按某一法则对应一子一个实数，记作 (a,b)，且满足：

1) 对称性：$(a,b)=(b,a)$
2) 线性性：$(\lambda a,b)=\lambda(a,b)$，$(a+b,c)=(a,c)+(b,c)$
3) 正定性：$(a,a)\geq 0$. 且等号成立 $\Leftrightarrow a=0$.

则称 (a,b) 为 a 和 b 的内积。带内积的 $\mathbb{R}$ 线性空间称为欧几里得（Euclid）空间，简称欧氏空间。

欧氏空间 = $\underbrace{\mathbb{R}\text{-线性空间}}$ + 内积

　　↳ 集合 + 加法 + $\mathbb{R}$数乘

注：$(\,,\,)$ 对第二个分量也是线性的。

性质：1) $\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i,\ \sum_{j=1}^{m}\mu_j b_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\lambda_i\mu_j(a_i,b_j)$

2) $(a,0)=0$.

3) 一组基之间的内积完全确定内积结构。

为了定义夹角，我们~~需~~要引入：

定理（Cauchy-Schwarz 不等式）：V 为欧氏空间，$\forall a,b\in V$

$$|(a,b)|\leq\sqrt{(a,a)\cdot(b,b)}$$

证：$\forall\lambda\in\mathbb{R}$，$(\lambda a+b,\lambda a+b)\geq 0$

$\Rightarrow (a,a)\lambda^2+2(a,b)\lambda+(b,b)\geq 0\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow 4(a,b)^2-(a,a)(b,b)\leq 0$　　□

② ↳ 可以定义夹角了！（不affect定原理）

定义：V 为欧氏空间.

1) $\forall a\in V$ 称 $|a| := \sqrt{(a,a)}$ 为 a 的长度或模.

2) $\forall a,b\in V$ 称 $|a-b|$ 为 a 和 b 之间的距离 记为 $d(a,b)$.

3) $\forall a,b\in V\setminus\{0\}$, 定义 a 和 b 之间的夹角为 $\theta=\arccos\frac{(a,b)}{|a|\cdot|b|}$

特别地，当 $(a,b)=0$ 时，称 a 与 b 正交或垂直 记作 $a\perp b$

单位向量 i.e. $|a|=1$

单位化 i.e. $\underset{\neq 0}{a}\mapsto\frac{a}{|a|}$.

距离的性质：

1) 对称性 $d(a,b)=d(b,a)$

2) 正定性 $d(a,b)\geq 0$, "=" $\Leftrightarrow$ $a=b$.

3) 三角不等式 $d(a,b)\leq d(a,c)+d(c,b)$.

4) 勾股定理 $\alpha\perp\beta \Leftrightarrow |\alpha|^2+|\beta|^2=|\alpha+\beta|^2$

5) $|\alpha|=|\beta| \Rightarrow \alpha+\beta\perp\alpha-\beta$

$\alpha:=c-a \quad \beta:=b-c \quad\Rightarrow \alpha+\beta=b-c$

$|\alpha+\beta|^2=(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=|\alpha|^2+2(\alpha,\beta)+|\beta^2|\leq(|\alpha|+|\beta|)^2$

例：$V=\mathbb{R}^n$, $\forall\ \vec{a}=(a_1,\cdots,a_n)$, $\vec{b}=(b_1,\cdots,b_n)$

$(\vec{a},\vec{b}):=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$.

则 $(\ ,\ )$ 为 V 上的一个内积.

模长：

夹角：

Cauchy-Schwarz 公式：③

例：V 为 n 维 $\mathbb{R}$-线性空间.（例如 $V=\mathbb{R}_{n+1}[x]$）

$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基.

$$V \xrightarrow[1:1]{\alpha_1\cdots\alpha_n} \mathbb{R}^n$$

$$\alpha \longmapsto \vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad (\alpha,\beta):=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$$

$$\beta \longmapsto \vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\forall\, \alpha,\beta\in V$（不妨设 $\alpha=a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n$，$\beta=b_1\alpha_1+\cdots+b_n\alpha_n$）

$$(\alpha,\beta):=a_1b_1+\cdots+a_nb_n.$$

则 $(\,,\,)$ 为 V 上的内积且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 两两垂直，即

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

注：任意内积均为这一形式.

例：$(\vec{a},\vec{b})=a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_1$ 不为内积！

在无穷维空间上也可类似定义内积（Hilbert 空间.）

例：$V=C[a,b]$，$(f,g):=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$.

模长：

夹角：

Cauchy-Schwarz 式：

在 $C[-\pi,\pi]$ 上 $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots\cdots$ 两两正交！

$\forall\, f\in C[-\pi,\pi]$ $\exists\, a_n, b_n$ s.t.

$$f=a_0-\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

§7.2 内积的表示与标准正交基

F-线性空间 $V \xrightarrow[1:1]{\text{基}(\alpha_1\cdots\alpha_n)} F^n$ $\quad \alpha=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

V上的F-线性变换 $\xrightarrow[1:1]{\text{基}(\alpha_1\cdots\alpha_n)} F^{n\times n}$ $\quad \mathcal{A}(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A$

V= 欧氏空间. $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 上的一组基.

$\forall\, \alpha = a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n$, $\beta= b_1\alpha_1+\cdots+b_n\alpha_n \in V$.

$$(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j\cdot(\alpha_i,\alpha_j)$$

$\Rightarrow$ $(\ ,\ )$ 由 值 $g_{ij} = (\alpha_i,\alpha_j)$ $(1\le i,j\le n)$ 唯一确定.

记 $G=(g_{ij})_{n\times n}$. 称 G 为内积 $(\ ,\ )$ 在基 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 下的度量矩阵.

$x:=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$, $y:=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ 则 $(\alpha,\beta) = x^TGy$.

V上的内积 $\xrightarrow[1:1]{\text{基 } \alpha_1\cdots\alpha_n}$ 实上 n 阶正定矩阵

$(\ ,\ ) \longmapsto G = ((\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n}$